1.4 Aufgaben mit der Größe Arbeit

Aufgabe 1:

Ein Wagen von der Masse m = 400 kg soll auf eine um h = 2,4 m höher liegende Rampe (Abb.6) gebracht werden. Das soll geschehen

a) mit Hilfe eines Kranes,

b) durch Verschieben auf einer unter $\alpha = 30°$ geneigten Fahrbahn

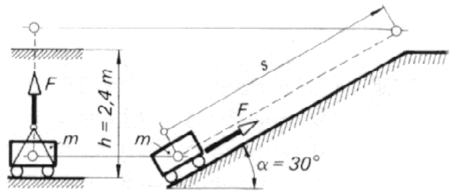


Abb.6: Wagen an Rampe

Im Fall b) soll die Verschiebekraft F parallel zur schiefen Ebene wirken. Die Reibung soll unberücksichtigt bleiben (geringe Rollreibung).

Für beide Fälle ist die aufzubringende Arbeit W zu bestimmen.

Lösung 1:

a) Bei Kranen und anderen Senkrechtfördergeräten spricht man von **Hubarbeit W_h.**

Da hier die Seilkraft F gleich der konstanten Gewichtskraft $F_G = mg$ zu überwinden ist, gilt:

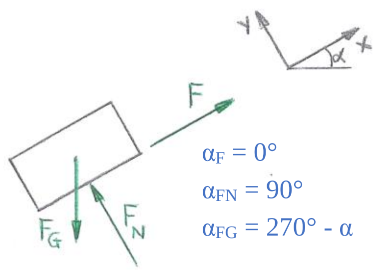
$\boxed{W_h = m \cdot g \cdot h}$ **Hubarbeit**

Wichtig ist die Erkenntnis, daß für horizontale Bewegungen des Kranes mit der Last keine Hubarbeit aufgebracht werden muß, weil keine Höhendifferenz zu überwinden ist ($\Delta h = 0$).

b) Wir beginnen mit der Skizze des freigemachten Wagens (Lageskizze).

Wir erkennen, dass die zum Verschieben des Wagens erforderliche Kraft F gleich der Gewichtskraftkomponente $F_G \cdot \sin\alpha$ ist. Diese Komponente heißt *Hangabtriebskomponente* der Gewichtskraft F_G.

Zu Übungszwecken setzen wir noch einmal die beiden Gleichgewichtsbedingungen an (Achsenkreuz um α zur Waagerechten gedreht).



$\alpha_F = 0°$

$\alpha_{FN} = 90°$

$\alpha_{FG} = 270° - \alpha$

$\Sigma F_x = 0$: $F \cdot \cos\alpha_F + F_N \cdot \cos\alpha_{FN} + F_G \cdot \cos\alpha_{FG} = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0$: $F \cdot \sin\alpha_F + F_N \cdot \sin\alpha_{FN} + F_G \cdot \sin\alpha_{FG} = 0$ (2)

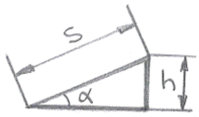
Aus (1):

$F = - F_G \cdot \cos(270° - \alpha)$ $|\cos(270°-\alpha) = -\sin\alpha$

$\Leftrightarrow$ $F = F_G \cdot \sin\alpha$

Mit $F = F_G \sin\alpha$ haben wir die in Wegrichtung fallende Verschiebekraft (Kraft- und Wegrichtung müssen zusammenfallen!).

Den Verschiebeweg s können wir mit Hilfe der Sinusfunktion aus der Hubhöhe h bestimmen ($s = h / \sin\alpha$)
Da auch hier die Verschiebekraft konstant ist, gilt die einfache Beziehung: Arbeit ist gleich Kraft mal Weg.



$s = h/\sin\alpha$

$W = F \cdot s$
$= F_G \cdot \sin\alpha \cdot h/\sin\alpha$
$= F_G \cdot h$
$\underline{W = m \cdot g \cdot h}$
$400kg \cdot 9{,}81m/s2 \cdot 2{,}4m$
$\underline{W = 9417{,}6\ J}$

Die Rechnung führt uns zum gleichen Ergebnis wie im Fall des Kranes ($\sin\alpha$ kürzt sich heraus). Das heißt:

> Es ist gleichgültig, auf welchem Weg eine Last auf eine höhere Ebene gebracht wird. Stets ist dazu die Hubarbeit W_h = Gewichtskraft G mal Hubhöhe h erforderlich.
> Horizontale Verschiebungen einer Last haben keinen Einfluß auf die Hubarbeit.

Beachte:
Beim Verschieben einer Last auf einer schiefen Ebene wird nichts an mechanischer Arbeit gespart. Zwar wird die Verschiebekraft umso kleiner, je kleiner der Neigungswinkel α der schiefen Ebene ist, umso größer wird dann jedoch der Verschiebeweg. Das Produkt aus beiden ist immer wieder gleich der Hubarbeit.

Aufgabe 2:

Ein Werkstück von der Masse $m = 10$ kg soll auf horizontaler Bahn durch die Kraft F mit konstanter Geschwindigkeit v um den Weg $s_R = 2$ m verschoben werden (Abb.7). Die Kraft F greift unter dem Winkel $\alpha = 30°$ zur Horizontalen an.
Die Gleitreibzahl zwischen Werkstück und Unterlage beträgt $\mu = 0{,}25$.
Gesucht wird eine Gleichung für die Reibarbeit W_R und deren Betrag.

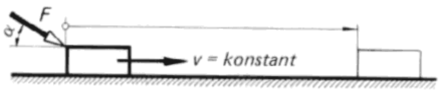
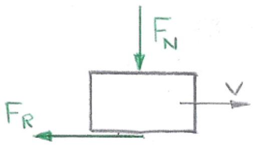


Abb.7: Werkstück mit Reibung



Bei $v = 0$: μ_0 Haftreibzahl
Bei $v > 0$: μ Gleitreibzahl
$F_R \cdot = \mu \cdot F_N$

Lösung 2:

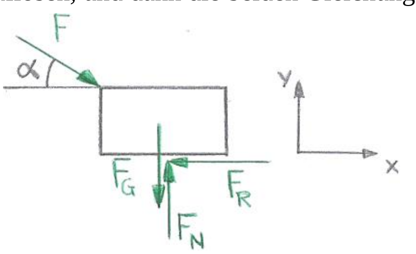
Zunächst wollen wir festlegen, was unter Reibarbeit zu verstehen ist:

> Reibarbeit W_R ist das Produkt aus der konstanten Reibkraft F_R und dem Reibweg s_R.

$$\boxed{\begin{aligned} W_R &= F_R \cdot s_R \\ W_R &= F_N \cdot \mu \cdot s_R \end{aligned}}$$

W_R : Reibarbeit in J
F_R : Reibkraft in N
F_N : Normalkraft in N
μ : Gleitreibzahl
s_R : Reibweg in m

Unsere erste Aufgabe ist es, eine Beziehung für die Normalkraft F_N zu entwickeln. Wir erhalten sie aus den Gleichgewichtsbedingungen für das freigemachte Werkstück, indem wir sowohl $\Sigma F_x = 0$ als auch $\Sigma F_y = 0$ nach F auflösen und dann die beiden Gleichungen gleichsetzen.
Unsere erste Aufgabe ist es, eine Beziehung für die Normalkraft F_N zu entwickeln. Wir erhalten sie aus den Gleichgewichtsbedingungen für das freigemachte Werkstück, indem wir sowohl $\Sigma F_x = 0$ als auch $\Sigma F_y = 0$ nach F auflösen, und dann die beiden Gleichungen gleichsetzen:



$-90° < \alpha_F < 0°$ ($\alpha_F = -\alpha = -30°$)
$\alpha_{FN} = 90°$
$\alpha_{FG} = -90°$
$\alpha_{FR} = 180°$

$\Sigma F_x = 0$: $F \cdot \cos\alpha_F + F_N \cdot \cos\alpha_{FN} + F_G \cdot \cos\alpha_{FG} + F_R \cos\alpha_{FR} = 0$
<=> $F \cdot \cos\alpha_F - F_R = 0$
<=> $F \cdot = F_R/\cos\alpha_F$ (1)

$\Sigma F_y = 0$: $F \cdot \sin\alpha_F + F_N \cdot \sin\alpha_{FN} + F_G \cdot \sin\alpha_{FG} + F_R \sin\alpha_{FR} = 0$

$\iff F \cdot \sin\alpha_F + F_N - F_G = 0$

$\iff F = (F_G - F_N)/(\sin\alpha)$ (2)

Aus (1) und (2):

$F = F_R/\cos\alpha_F = (F_G - F_N)/\sin\alpha_F$ $/ \cdot\sin\alpha_F$

$\iff F_R \cdot \tan\alpha_F = (F_G - F_N)$

mit $F_R = \mu \cdot F_N$

$\iff \mu \cdot F_N \cdot \tan\alpha_F = (F_G - F_N)$

$\iff F_G = F_N + \mu \cdot F_N \cdot \tan\alpha_F$

$\iff F_G = F_N \cdot (1 + \mu \cdot \tan\alpha_F)$

$\iff F_N = F_G /(1 + \mu \cdot \tan\alpha_F)$

mit $F_G \cdot = m \cdot g$

$F_N = m \cdot g /(1+\mu \cdot \tan\alpha_F)$

Betrachten wir α aus Abb.7: $0° < \alpha < 90°$ $(\alpha = -\alpha_F = 30°)$

$\tan\alpha_F = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

Daher:

$F_N = \frac{m \cdot g}{1 - \mu \cdot \tan\alpha}$

Mit der Beziehung für die Normalkraft F_N erhalten wir die gesuchte Funktionsgleichung $W_R = W_R(m, g, \mu, \alpha, s_R)$.

$W_R = F_R \cdot s_R$

$= \mu \cdot F_N \cdot s_R$

$W_R = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{1 - \mu \cdot \tan\alpha} \cdot s_R$

Das Endergebnis schreiben wir mit der Einheit Joule (J), weil dies die gesetzliche Einheit für die Arbeit ist (1 Nm = 1 J).

$W_R = 0{,}25 \cdot 10\text{kg} \cdot 9{,}81(\text{m/s}^2) \cdot 2\text{m} / (1 - 0{,}25 \cdot \tan 30)$

$\underline{W_R = 57{,}32\ \text{J}}$